UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

GUIA DE EJERCICIOS PARA LAS OLIMPIADAS JUVENILES MATEMATICAS

Guía realizada por los prestadores del Servicio Comunitario:
Thaizir El Troudi y David Ramirez

Julio 2016

Índice general

Capítulo 1

Ejercicios de Nivel 1

1.1. Álgebra

1. Pedro y María nacieron la misma fecha en años anteriores. Si en el año 2001 la suma de sus edades es 41, entonces la suma de sus edades será 129 en el años

   a) 2041   *b*) 2045   *c*) 2089   *d*) 2090   *e*) 2130

2. Pedro compra 100 cajas que contienen la misma cantidad de huevos. Debido a la lluvia, se mojaron 20 cajas de las cuales se rompieron, por la cual Pedro tuvo que redistribuir los huevos de las cajas rotas en las cajas restantes, colocando 20 en cada una de ellas. El número de huevos que compró Pedro fue

   a) 1600   *b*) 2000   *c*) 4000   *d*) 8000   *e*) 10000

3. Sean a y b números no nulos tales que $ab = a - 2b$. El valor de

   $$\frac{a}{2b} + \frac{2b}{a} - \frac{ab}{2} \quad \text{es}$$

   a) 2   *b*) -2 *c*) 0   *d*) 1   *e*) -1

4. Sean x_1 y x_2 raíces reales de la ecuación

   $$x^2 + px + q = 0$$

   Encuentra los valores de p y q de manera que $x_1 + 1$ y $x_2 + 1$ sean raíces de

   $$x^2 + p^2x + pq = 0$$

1.2. Aritmética

1. Encontrar el menor natural n con las siguientes propiedades:

   a) Su representación decimal termina en 6.

   b) Si borramos el 6 y lo colocamos delante del resto de los dígitos, el número resultante es cuatro veces el número original n.

2. En un concurso de matemáticas se proponen tres problemas A, B y C. Entre los participantes, hubo 26 que resolvieron al menos un problema cada uno. Entre los concursantes que no resolvieron el problema A, el número de los que resolvieron el B fue el doble de los que resolvieron el problema C. El número de estudiantes que resolvieron solamente el problema A fue uno mas que el de los que resolvieron el problema A y al menos otro problema. De todos los estudiantes que resolvieron un problema, la mitad no resolvió el problema A. ¿Cuántos estudiantes resolvieron solamente el problema B?

3. Probar que de un conjunto de diez números de dos cifras (en el sistema decimal) es posible elegir dos subconjuntos disjuntos cuyos miembros tengan la misma suma.

4. La mitad de 2^{2001} es

   a) 1^{2001} *b)* 1^{2000} *c)* 2^{505} *d)* 2^{1001} *e)* 2^{2000}

5. La media aritmética de dos números de tres cifras se obtiene colocando la coma decimal entre los dos números. La suma de los números es

   a) 222 *b)* 555 *c)* 666 *d)* 888 *e)* 999

6. La forma más simple de escribir $\sqrt{17-12\sqrt{2}}+\sqrt{17+12\sqrt{2}}$ es

   a) 6 *b)* $2\sqrt{17}$ *c)* $2\sqrt{12\sqrt{2}}$ *d)* $\sqrt{34}$ *e)* 1

7. El mayor entero n tal que $n\sqrt{3} < (n+1)\sqrt{2}$ es

   a) 4 *b)* 5 *c)* 6 *d)* 7 *e)* 8

8. De los siguientes números

   $$\sqrt{2001}+\sqrt{1998}+\sqrt{1997} \qquad \text{y}$$

   $$1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2000}+\sqrt{2001}}+\sqrt{1999}+\sqrt{1996}$$

   ¿Cuál es mayor?

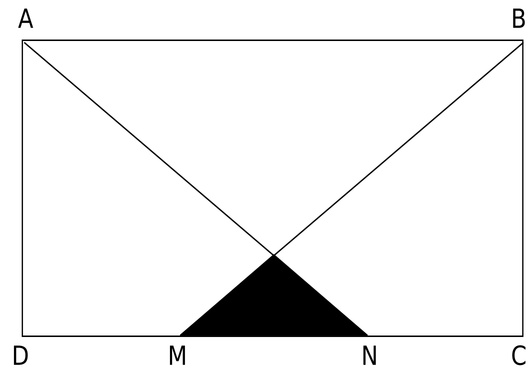
9. ¿Cuántos minutos faltan para las $9:00 a.m.$ sabiendo que hace 20 minutos faltaban $\frac{9}{5}$ delo que falta ahora?

1.3. Geometría

1. Una estrella de seis puntas se forma prolongando los lados de un hexágono regular de perímetro $50cm$. El perímetro de la estrella en cm es

   a) 50 *b)* 100 *c)* 150 *d)* 200 *e)* 300

2. En el rectángulo $ABCD$ el largo y el ancho están en la relación $3:2$. Los segmentos $\overline{AN}$ y $\overline{BM}$ son bisectrices de los ángulos A y en B, respectivamente. La relación entre el área sombreada y el área de $ABCD$ es

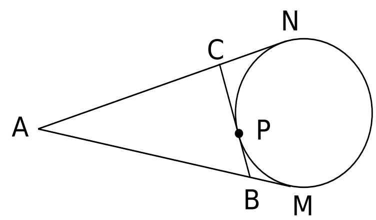


a) 1 : 12 *b*) 1 : 6 *c*) 1 : 24 *d*) 1 : 16 *e*) 1 : 8

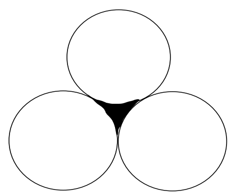
3. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 17 cm y su perímetro es 40 cm. Calcular su área.

4. Un triángulo rectángulo tiene catetos de longitudes a y b. Una circunferencia de radio r es tangente a los dos catetos y tiene su centro sobre la hipotenusa del triángulo. Demuestre que: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{r}$

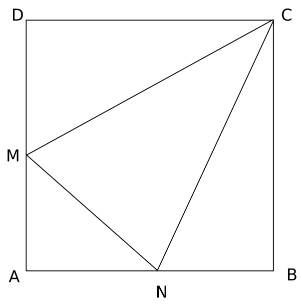
5. Calcular el perímetro del triángulo $\triangle ABC$ cuyos vértices son las intersecciones de las 3 tangentes a la circunferencia : $\overline{AN}$, $\overline{AM}$ y $\overline{CB}$, sabiendo que $\overline{AN} = 10$ cm. Nota N, M y P son los puntos de tangencia.



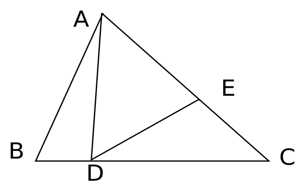
6. Calcular el área de la región sombreada. las circunferencias son tangentes entre sí y cada una de ellas tiene un radio de longitud r.



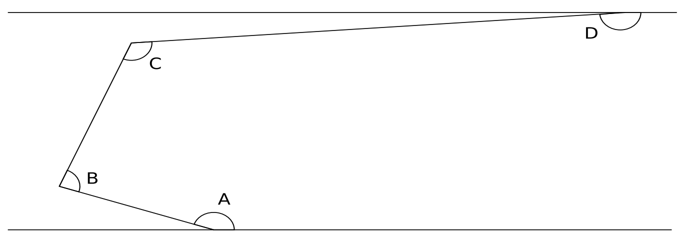
7. En la figura se tiene un cuadrado de lado igual a 1. Si el triángulo $\triangle CMN$ es equilátero, ¿cuánto vale el área de dicho triángulo?



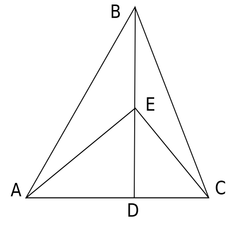
8. En la siguiente figura se tiene que $\overline{AB} = \overline{AC}$, $\overline{AE} = \overline{AD}$, $\measuredangle BAD = 30$. Encuentre el valor del ángulo $\measuredangle EDC$.



9. si $l1 \parallel l2$, calcular la suma de los ángulos $\measuredangle A$, $\measuredangle B$, $\measuredangle C$,$\measuredangle D$.

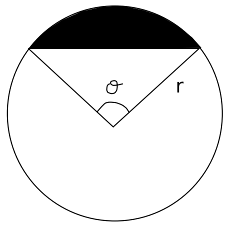


10. En la figura se tiene que $\overline{AC} = 4$ cm, $\measuredangle EAD = 45$, $\measuredangle BEC = 120$, $\overline{BD} \perp \overline{AC}$, $\overline{EA} = \overline{BE}$. Hallar la longitud de $\overline{BD}$.

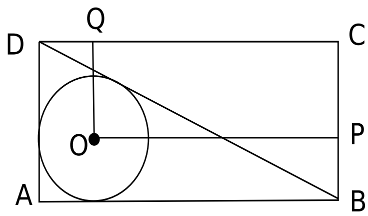


11. Hallar la razón (cociente) entre las áreas de un círculo circunscrito y un círculo inscrito en un triángulo equilátero de lado l.

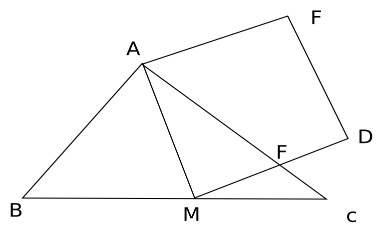
12. Calcular en términos de θ y r, el área de un segmento circular de abertura θ de un círculo de radio r.



13. El rectángulo $ABCD$ tiene un área de 36 cm^2, un círculo con centro O está inscrito en el triángulo $\triangle ABD$. ¿Cuál es el área del rectángulo $OPCQ$?



14. $\triangle ABC$ es un triángulo tal que $\overline{AB} = 6$ cm, $\overline{AC} = 8$ cm, $\overline{BC} = 10$ cm. M es el punto medio de $\overline{BC}$. $\square AMDE$ es un cuadrado y $\overline{MD}$ intersecta a $\overline{AC}$ en el punto F. Hallar el área del cuadrilátero $AFDE$.

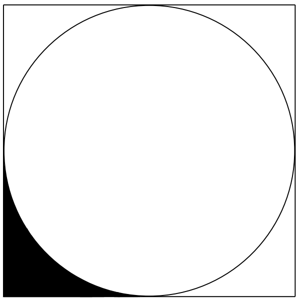


15. sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito en una circunferencia de tal forma que las prolongaciones de los lados $\overline{AO}$ y $\overline{BC}$ se encuentran en Q y las prolongaciones de AB y CD en P. Pruebe que las bisectríces de los ángulos $\measuredangle DQC$ y $\measuredangle APD$ son perpendiculares.

16. En el triángulo $\triangle ABC$ los segmentos $\overline{BN}$, $\overline{BL}$ y $\overline{BM}$ son respectivamente altura, bisectríz y mediana desde el ángulo $\measuredangle ABC$. Sabiendo que los ángulos $\measuredangle ABN$, $\measuredangle NBL$, $\measuredangle NBL$ y $\measuredangle MBC$ tienen la misma medida, determine las medidas de los ángulos internos del triángulo $\triangle ABC$.

17. Probar que hay un único triángulo cuyos lados tienen por longitudes enteros consecutivos y unos de sus ángulos es doble de otro.

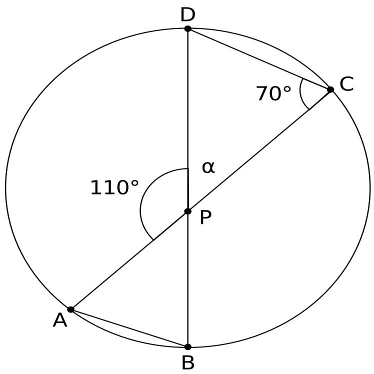
18. Se tiene un circulo de radio 4 inscrito en un cuadrado. Determine el área de la región sombreada.



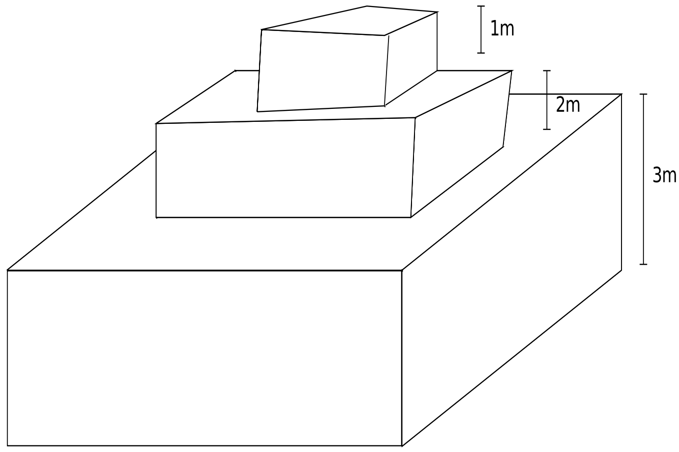
19. Una hoja cuadrada de papel $ABCD$ es doblada de manera que el vértice C coincide con el punto medio M de AB. Si el lado del cuadrado $ABCD$ es 1, entonces ¿cuál es la longitud de BP?.

20. Una hormiga camina alrededor de un cuadrado de un metro de lado, manteniéndose en todo momentos a exactamente un metro de distancia del borde del cuadrado. ¿Cuál es el área encerrada por un circuito completo de la hormiga?.

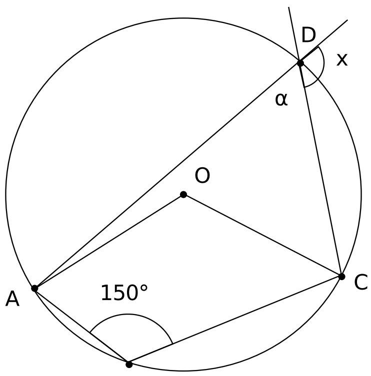
21. En la figura, $\angle ACD$ es igual a 70 y $\angle APD$ es igual a 110. Hallar $\angle CAB$.



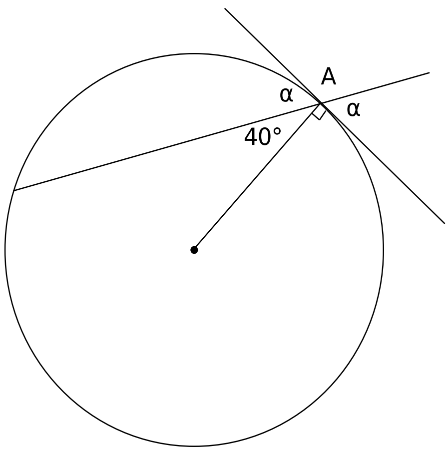
22. Una escultura consta de tres cubos grandes, colocando uno encima del otro como se muestra en la figura. Se debe pintar la superficie expuesta una vez que la escultura se coloque fija en el patio del liceo. El mayor de los cubos, de arista 3 metros se colocará en el piso. Los otros dos cubos, de aristas 2 metros y 1 metro, respectivamente, se colocarán uno encima del otro. Si cada lata de pintura alcanza para pintar exactamente 1 metro cuadrado de superficie, ¿cuántas latas de pintura se requieren para pintar la escultura?.



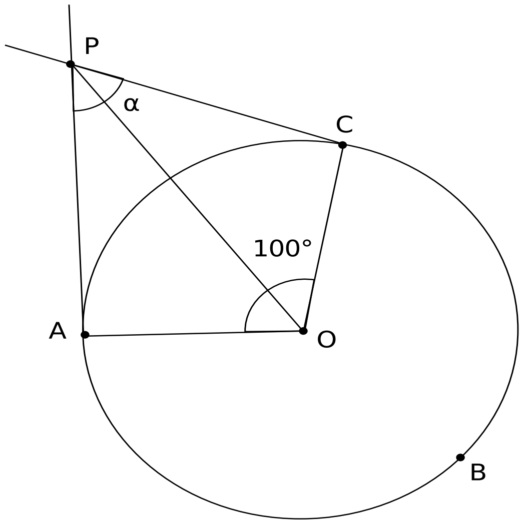
23. En la figura, calcule x



24. En la figura, hallar el valor de α donde A es un punto de tangencia del círculo C.

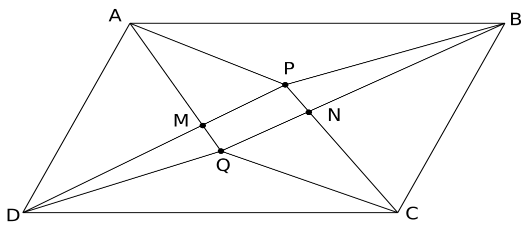


25. En la figura se tiene que el arco ABC mide 260. Hallar α donde A y C son puntos de tangencia.



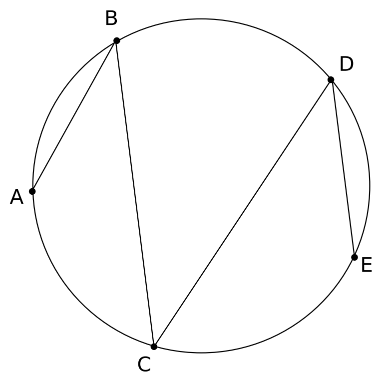
26. Caracteriza el triángulo con el mayor área posible, dada la longitud de un lado y la suma de las longitudes de los dos lados restantes.

27. Sean P y Q dos puntos en el interior del paralelogramo $ABCD$. P y Q no están alineados con los vértices de $ABCD$. Considera los segmentos que unen a P y Q con cada vértice del paralelogramo, $\overline{PD} \cap \overline{AQ} = \{M\}$ y $\overline{PC} \cap \overline{BQ} = \{N\}$. Demuestra que la suma de las áreas de $\triangle APM$ y $\triangle BPN$ es igual a la suma de las áreas de $\triangle DMQ$ y $\triangle QNC$.

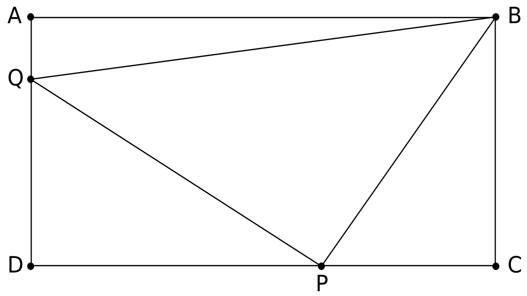


28. ¿Cuál es el mayor área posible para un triángulo, conociendo que dos de sus lados miden respectivamente $5cm$ y $7cm$.?

29. Sean A, B, C, D, E puntos distintos distribuidos sobre una circunferencia de manera que $\angle ABC = \angle BCD = \angle CDE = 45°$. Demostrar que $AB^2 + DC^2 = BC^2 + DE^2$.



30. Sea $ABCD$ un rectángulo de área $100cm^2$. Sea P un punto en $\overline{CD}$, Q un punto en $\overline{DA}$ tales que las áreas de los triángulos AQB, BPC y PDQ son iguales. Hallar el área del triángulo PQB.



1.4. Matemática Recreativa y Lógica

1. Un número natural n es *organizado* si el conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ se puede descomponer como unión disjunta de conjuntos $A_1, \ldots, A_k$ de tal modo que, en cada conjunto A_i, el mínimo elemento sea igual a la cantidad de los elementos que tiene A_i. Hallar todos los números naturales organizados.

2. En cada casilla de un tablero $n \times n$ se puede colocar una ficha. Diremos que una ficha ve a otra si ambas están en la misma fila o en una misma columna y las casillas intermedias de esa fila o columna, si las hubiera, están vacías (sin fichas). Determinar el máximo número de fichas que se pueden colocar de manera tal que cada ficha vea exactamente dos fichas.

3. El reloj de Luis está 10 minutos adelantado, pero él cree que está 5 minutos retrasado. El reloj de Elsa está 5 minutos retrasado, pero ella piensa que está 10 minutos adelantado. El reloj de José esta 5 minutos retrasado, pero él cree que esta 10 minutos retrasado. El reloj de Sandra está 10 minutos retrasado, pero ella piensa que está 10 minutos adelantado. Ellos deben tomar un avión que sale a las $6:00$pm. Si cada uno de ellos usa su reloj y sale hacia el aeropuerto a la hora que considera apropiada para llegar a tiempo, ¿quienes pierden el avión?

4. En una carrera, el corredor que llegó tres lugares delante del que arribó de penúltimo, llegó dos lugares delante del que ocupó el séptimo lugar. ¿Cuántos corredores terminaron la carrera?

5. A, B, C y D son cuatro equipos de béisbol venezolano. B tiene más fanáticos que A y C juntos. A y B tienen los dos tantos fanáticos como C y D. A y D juntos tienen más fanáticos que B y C juntos. La ordenación de los equipos por número de fanáticos es:

   a) $A > B > C > D$ *b)* $A < C < B < D$ *c)* $D < B < C < A$
   d) $D > B > A > C$ *e)* $C > D > B > A$

6. Un lechero dispone únicamente de dos jarras de 3 y 5 litros de capacidad para medir la leche que vende a sus clientes. ¿Cómo podrá medir un litro sin desperdiciar la leche?

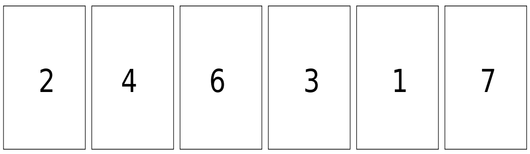
7. En una misma caja hay 10 pares de calcetines de color café y 10 pares negros. En otra, hay 10 pares de guantes de color café y 10 pares negros. ¿Cuántos calcetines y cuántos guantes necesitaría sacar de cada caja, para conseguir un par de calcetines del mismo color y un par de guantes del mismo color para usarlos?

8. Un poderoso príncipe castigaba con la muerte a quien cazara en su reino. Se le daba al condenado la posibilidad de elegir entre ser ahorcado y ser decapitado, mediante la formulación de una proposición del delincuente. Si la proposición era falsa, se le ahorcaba; si era verdadera, se le decapitaba.

   Hubo un experto en lógica que evitó la muerte después de ser condenado al escoger la proposición: *"Seré ahorcado"*.

   Explique por qué es imposible ajusticiarle sin infringir las leyes.

9. Observa los número que aparecen en las seis cartas. ¿De cuántas maneras distintas se pueden seleccionar dos cartas a la vez de modo que la suma de los números sea par?

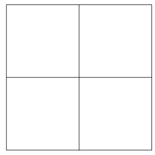


   a) 12 *b)* 7 *c)* 6 *d)* 5 *e)* 4

10. Son las 8a.m. y un reloj comienza a adelantarse 30 minutos cada hora. Cuando el reloj marque las 8p.m. la hora correcta es

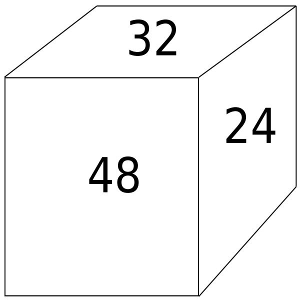
    a) $3p.m.$ *b)* $4p.m.$ *c)* $5p.m.$ *d)* $6p.m.$ *e)* $8p.m.$

11. En la figura se quiere pintar cada cuadrito de rojo o azul. Los cuadritos de la columna de la izquierda no pueden ser azules a la vez y los cuadritos de la columna de la derecha no pueden ser rojos a la vez. ¿De cuántas maneras diferentes puede pintarse la figura?



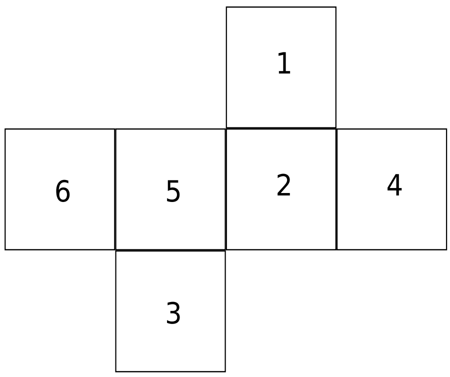
a) 3 *b*) 5 *c*) 7 *d*) 9 *e*) 11

12. En la figura, los números en las caras de la caja indican sus áreas en cm^2. El volumen de la caja en cm^3 es



a) 64 *b*) 144 *c*) 192 *d*) 216 *e*) 512

13. Observa la plantilla de un cubo con un número en cada cara. Al construir el cubo, los números de las caras que tengan vértice común se multiplican. El mayor producto es



a) 40 *b*) 60 *c*) 72 *d*) 90 *e*) 120

14. Una de las respuestas es correcta. ¿Cuál es el número total de letras en las opciones incorrectas de esta pregunta?

a) quince *b*) veintidos *c*) treinta y dos *d*) cuarenta *e*) cuarenta y cinco

15. Con los dígitos 5 al 9 se forman todos los números enteros posibles de cinco cifras y se ordenan en forma decreciente. Determinar el centésimo número de esta secuencias.

16. Jorge miente los días lunes, martes y miércoles. Pascual miente los viernes, sábados y domingos. Cuando ellos no mienten, dicen la verdad. Un día se encuentran y mantienen la siguiente conversación:

    Jorge: - Yo mentí ayer.

    Pascual: - Yo también mentí ayer.

    ¿Qué día de la semana se encontraron Jorge y Pascual?

17. En cierta isla los habitantes son de dos tipos: los caballeros, que siempre dicen la verdad, y los pícaros, que siempre mienten. Un día se encuentran reunidos tres nativos de la isla, llamados Apu, Bepu y Cepu. Apu dice "Los tres somos pícaros". Bepu dice "Exactamente uno de nosotros es caballero". Cepu no dice nada. ¿Qué es cada uno de ellos?.

18. Antiguamente había un rey poderoso que vivía en un gran palacio, famoso por la belleza de sus jardines. El rey tenía tres hijas y era aficionado a las matemáticas.

    Un día, el príncipe del reino vecino fue al castillo a visitar al rey. Ya en conversación con él, el príncipe manifiesta si deseo de saber las edades de sus hijas. El rey responde: "el producto de sus edades es 36 y su suma, casualmente es igual al número de jardines de este palacio".

    El príncipe, entusiasmado por resolver el enigma, corrió a averiguar el número de jardines del palacio. Luego de reflexionar un momento, el príncipe regresó a informarle al rey que le faltaban datos para resolver el acertijo. A lo que el rey respondió: "Tienes razón. Se me olvidó decirte que mi hija mayor tiene los ojos azules".

    Con esta nueva información el príncipe logró determinar las edades de las hijas del rey. ¿Cuales son las edades?, ¿Cuántos jardines hay en el palacio?.

1.5. Relaciones y Funciones

1. Si $f(x) = x^2 - 7x + k$ y $f(k) = -9$, entonces $f(1)$ es igual a

   a) 9 *b)* 3 *c)* 0 *d)* -9 *e)* -3

2. La cantidad de números enteros x que verifican la relación

   $$\frac{2}{5} < \frac{x}{18} < \frac{11}{13} \qquad \text{es}$$

   a) 8 *b)* 7 *c)* 0 *d)* 9 *e)* 1

3. Si $xy + x = 5$ y $y^2 + 2y = 19$ entonces $\frac{x}{y+1}$ es igual a

   a) $\frac{1}{8}$ *b)* $\frac{1}{5}$ *c)* $\frac{1}{4}$ *d)* $\frac{5}{18}$ *e)* $\frac{2}{5}$

4. Dada una función f, de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$, como

   $f(1) = 1$

   $f(n) = f(n-1) + 1$ si n es un cuadrado perfecto $(n > 1)$

   $f(n) = f(n-1)$ si n no es un cuadrado perfecto $(n > 1)$.

   Describe como hallar todos los enteros positivos n tales que $f(n) = 2001$.

Capítulo 2

Ejercicios Nivel 2

2.1. Álgebra

1. Las edades de los esposos Contreras son tales que Eduardo es mayor que Julia, la diferencia de los cuadrados de sus edades es 448 y la suma de ellas es 56. ¿Cuán vieja es Julia?.

   a) 48 años *b*) 64 años *c*) 32 años *d*) 24 años

2. El valor de $[\log_8(4\log_8 64)]^2$ es:

   a) 8 *b*) 4 *c*) 2 *d*) 1

3. Si $y = \dfrac{x}{1-x}$ entonces x es igual a:

   a) $\dfrac{1+y}{y}$ *b*) $\dfrac{1-y}{y}$ *c*) $\dfrac{y}{1+y}$ *d*) $\dfrac{y}{1-y}$

4. Si k es un número real, entonces el sistema de ecuaciones:

   $x + ky = 2$
   $kx + y = 1$

   No tiene solución si y sólo si k es igual a:

   a) 0 ó 1 *b*) $\dfrac{1}{2}$ ó $-\dfrac{1}{2}$ *c*) 2 ó -2 *d*) 1 ó -1

5. Si a es un entero positivo y $b = -a$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?

   a) $ab < 0$ *b*) $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} = 0$ *c*) $a + b = 0$ *d*) $a^2b < 0$

6. Se tiene un conjunto de n números, tal que uno de ellos es igual a $1 + 2n$ y los otros son iguales a 2. El promedio de estos números es:

a) $4 - \dfrac{1}{n}$ *b*) n *c*) $n - 1$ *d*) $4 - n$

7. Si $z = a + bi$ es tal que $z^2 = z + \overline{z}$, entonces $(a-1)^2 + b^2$ es igual a:

   a) 3 *b*) 2 *c*) 1 *d*) 0

8. Si $|x - 1| = 3x$. ¿Cuál es el valor de x?

9. Si $8 \cdot 2^x = 5^{y+8}$, calcular el valor de x cuando $y = -8$.

10. Sean $x\,, y\,, z$, enteros positivos tales que $z = (x + yi)^3 - 47i$. Calcular el valor de z.

11. Si $\log|x - 1| = \dfrac{1}{2}\log(2x + 1)$, para $x > 1$, entonces ¿cuál es el valor de x?

12. Resolver el sistema:
$$\begin{array}{ccccccc} x^2y & + & xy^2 & = & -4 & & \\ x & + & xy & + & y & = & 0 \end{array}$$

13. Se tiene una progresión aritmética en la cual la suma de un número cualquiera de términos es siempre el triple del cuadrado del número de términos. Hallar el término de lugar 1991.

14. Un padre entregó una suma de dinero a su hijo para el gasto de manutención en la universidad y le dijo lo siguiente:

    "Puedes gastar la mitad del dinero en la primera semana, una tercera parte de lo que te queda en la segunda semana, una cuarta parte de lo que te queda la tercera semana y así sucesivamente.

    Te volveré a dar el dinero en el momento que te quede una décima parte del dinero que recibiste."

    Si el hijo gasta el dinero siguiendo la indicación de su padre ¿cuántas semanas deben transcurrir para que el hijo reciba otra remesa de dinero?

15. Dos ascensores descienden, a partir del mismo instante, desde el piso 6 hasta el piso 1 de un edificio. El ascensor **A** tarda un minuto para bajar de un piso al siguiente y el ascensor **B** tarda dos minutos. El ascensor que llega primero al un piso debe parar 3 minutos par tomar o dejar pasajeros y el ascensor que llega después no se detiene en ese piso, continuando en su descenso. ¿Cuál de estos ascensores llega primero al piso 1?

16. Un polinomio de tercer grado, cuyo primer coeficiente es 1, es divisible por $x - 2$ y entre $x - 1$ y al dividirlo por $x - 3$ da resto 20. ¿Cuál es el resto al dividirlo entre $x + 3$?

17. ¿Cuál es la suma de las raíces de la ecuación $5x^2 + x - x\sqrt{5x^2 - 1} - 2 = 0$?

18. Sean a, b, c, números reales positivos tales que $a+b-c = 1$. Demostrar que

    $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \geq 9.$

19. En una reunión participaron 5 personas (A, B, C, D, E) de diferentes países y se pudo observar que:
    - B y C conversaban en inglés. pero cuando se les acercaba D debían pasar al español, único idioma común entre los 3.
    - El único idioma común de A, B y E era el francés.
    - El único idioma común entre C y E era el italiano.
    - Tres personas conocían portugués.
    - El idioma más hablado era el español.
    - Una de las personas conocía 5 idiomas, otra conocía 4, otra conocía 3, otra conocía 2 y otra hablaba un solo idioma.

    Determinar los idiomas que habla cada una de estas personas.

20. Hallar cinco números enteros conociendo que las sumas, dos a dos, de éstos números son: 637, 669, 794, 915, 919, 951, 1040, 1072, 1197.

21. En una carrera de 100 metros planos participan cuatro muchachos A,B,C y D que terminan cada uno en una posición distinta. Al día siguiente de la carrera, los cuatro muchachos reportan el resultado de la misma a un amigo común que no asistió a la competencia, de la manera siguiente:

    A dice:

    1) Yo llegué un lugar antes que B.
    2) Yo no llegué primero.

    B dice :

    3) Yo llegué un lugar antes de C.
    4) Yo no llegué segundo.

    C dice:

    5) Yo llegué un lugar antes que D.
    6) Yo no llegué tercero.

    D dice:

    7) Yo llegué un lugar antes que A.
    8) Yo no llegué de último

    De todas estas afirmaciones, dos son verdaderas y seis son falsas. Además, el ganador dice una de las frases verdaderas. ¿Quién ganó la carrera?

22. Se tienen 9 litros de una loción de afeitar que contiene un 50 % de alcohol. ¿Cuál es el número de litros de agua requeridos para convertirla en una loción que contenga 30 % de alcohol?

23. Si $(a, b) * (c, d) = (a - c, b + d)$ para cualesquiera que sean a, b, c, d y si $(3, 2) * (0, 0) = (x, y) * (3, 2)$ entonces ¿Cuál es el valor de x?

24. Si $x > 0$ y $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 7$ entonces $x^5 + \dfrac{1}{x^5}$ es igual a:

    a) 55 *b)* 63 *c)* 123 *d)* 145

25. Resuelva la ecuación

$$2\operatorname{sen}^2(\theta) + \sqrt{3}\cos(\theta) + 1 = 0$$

26. Si $xy = b$, $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = a$ entonces $(x + y)^2 =?$

27. Consiga tres enteros consecutivos x, y, z que cumplan con la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$. Muestre que NO existen tres enteros consecutivos que cumplan que $x^3 + y^3 = z^3$.

28. El valor de p para que la ecuación $x^2 + (p + 2)x - q = 0$ tenga dos raíces opuestas es

    a) -2 *b)* $-q$ *c)* 0 *d)* q *e)* 2

29. Si $x > y > 0$, $\log_y x + \log_x y = \dfrac{10}{3}$ y $xy = 144$, entonces $\dfrac{x + y}{2}$ es igual a

    a) $12\sqrt{2}$ *b)* $13\sqrt{3}$ *c)* 24 *d)* 30 *e)* 36

30. Si $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ y $2\operatorname{sen} 2x = 3\cos x$ entonces $\tan x$ es igual a

    a) $\dfrac{3}{4}$ *b)* $\dfrac{5}{6}$ *c)* $\dfrac{7}{6}$ *d)* $\dfrac{3\sqrt{7}}{7}$ *e)* $\dfrac{3\sqrt{3}}{7}$

31. Hallar x e y si

$$\begin{cases} 3^{x+y} = 729 \\ \log x + \log y = \log 8 \end{cases}$$

32. Determinar todos los valores de x del intervalos $0 \leq x \leq 2\pi$ que satisfacen la desigualdad

$$2\cos x \leq |\sqrt{1 + \operatorname{sen} 2x} - \sqrt{1 - \operatorname{sen} 2x}| \leq \sqrt{2}$$

33. Considerar el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{aligned}$$

    Con incógnitas x_1, x_2, x_3. Los coeficiente satisfacen las condiciones:

    a) a_{11}, a_{22}, a_{33} son números positivos.

    b) Los restantes coeficientes son números negativos.

    c) En cada ecuación, la suma de los coeficientes es positiva.

Probar que el sistema dado tiene unicamente la solución $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

34. Sean k, m, n tres números naturales tales que $m + k + 1$ sea un primo mayor que $n + 1$.
Sea $C_s = s(s+1)$, para cualquier número natural s. Probar que el producto

$$(C_{m+1} - C_k)(C_{m+2} - C_k) \dots (C_{m+n} - C_k)$$

es divisible por $C_1 \cdot C_2 \cdot \dots \cdot C_n$.

35. Dados n números reales tales que $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n$ y dada la función

$$f(x) = \frac{a_1}{x + a_1} + \frac{a_2}{x + a_2} + \dots + \frac{a_n}{x + a_n}$$

determinar la suma de las longitudes de los intervalos, disjuntos dos a dos, formados por todos los valores de x tales que $f(x) > 1$.

36. Sea $P(x)$ un polinomio mónico de grado 4 con coeficientes enteros. Pruebe que si $P(x)$ toma el valor -1 en tres enteros distintos, entonces $P(x)$ no es el producto de polinomios mónicos de grado positivo con coeficientes enteros.

37. Resuelva el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2^x & - & 2^y & = & 4032 \\ x & - & y & = & 6 \end{cases}$$

38. Halle el valor de x^2+y^2 si x e y son números positivos tales que $xy+x+y = 71$ y $x^2y + xy^2 = 880$.

39. ¿Cuántas cifras tiene el número $5^{1989} \cdot 4^{995}$?

40. Considere el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ ax + y = 3 \end{cases}$$

Encuentre todos los valores de a para que el sistema tenga una solución (x, y) en el primer cuadrante.

2.2. Aritmética

1. $-\left(\dfrac{1}{125}\right)^{-2/3}$ ¿es igual a?

2. ¿De cuántas maneras puede ser expresado el número 26 como la suma de dos números primos?

   a) 1 *b*) 2 *c*) 3 *d*) 4

3. ¿Cuál es la máxima cantidad de números pares que puede haber para que la suma de 1991 números enteros sea impar?

   a) 995 *b*) 1 *c*) 1990 *d*) 1991

4. Sean a, $b \in \mathbb{Z}^+$, $\frac{a}{b} < 1$. Si se suman tres unidades tanto al numerador como al denominador de $\frac{a}{b}$, el nuevo valor de la fracción:

   a) está entre 0 y 1
   b) es igual a $\frac{a}{b}$
   c) aumenta en tres unidades
   d) aumenta en una unidad

5. La suma de todos los números enteros comprendidos entre 1900 y 1991 que terminan en 5 es:

   a) 35020 *b*) 3890 *c*) 17505 *d*) 405

6. En nuestro sistema de numeración de base 10, número 237 es igual a $2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$. En Melba usan como base de su sistema de numeración el número entero r. El señor Alf, que vive en ese país, compra un libro que le cuesta 420 melbines. Alf pagó con un billete de 1000 melbines y le devolvieron 250 melbines. El valor de r es:

   a) 8 *b*) 7 *c*) 6 *d*) 9

7. ¿Cuál es el menor número primo que divide a la suma de $7^{1991} + 11^{1991}$?

   a) 3 *b*) 2 *c*) 11 *d*) 7

8. Si el número $100^{1991} - 1991$ se escribe en notación decimal, la suma de sus dígitos es:

   a) 35821 *b*) 35820 *c*) 35819 *d*) 35818

9. ¿En cuántos ceros termina 25!?

10. Hallar todos los pares de números enteros x, y tales que:

    $x^2 - y^2 = 1991$

11. Encontrar el valor de:

$$\cfrac{4}{3 + \cfrac{4}{3 + \cfrac{4}{3 + \dots}}}$$

12. ¿Cuál de los números $\sqrt[9]{9!}$ y $\sqrt[10]{10!}$ es mayor?

13. Halla un número de tres cifras que sea igual al cuádruple del producto de sus cifras.

14. ¿Qué día de la semana estaremos dentro de 10^{2001} días?

15. Se considera un número n de cuatro cifras, cuadrado perfecto, tales que todas sus cifras son menores que 6. Si a cada cifra se le suma 1, el número resultante es otro cuadrado perfecto. Hallar n.

16. ¿Para qué valores de n, $2^8 + 2^{11} + 2^n$ es un cuadrado perfecto?

17. De un número n, de dos dígitos, sustraemos el número con los dígitos invertidos y obtenemos un cubo perfecto positivo. ¿Cuáles son los valores posibles para n?

18. Encontrar un número n de cinco cifras diferentes y no nulas, que sea igual a la suma de todos los números de tres cifras distintas que se pueden formar con las cinco cifras de n.

19. ¿Cuántos enteros positivos múltiplos de 9 están formados por 7 dígitos no nulos diferentes?

20. Probar que el número

$$M = 111 + 222^2 + 333^3 + 444^4 + 555^5 - 12345$$

no es un cuadrado perfecto. (no es de la forma n^2 donde n es un número natural.

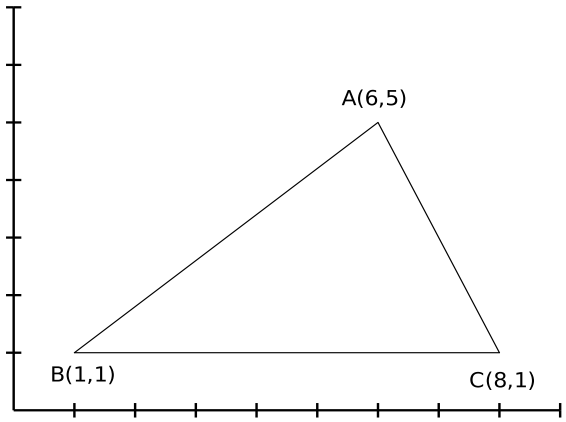
21. Una señora tiene tres hijas en edad escolar. El producto de su edad con la de sus hijas es 16.555 hallar la diferencia entre las edades de su hija mayor y su hija menor.

22. Un tren de mercancías llena sus vagones de gasolina en la refinería. Se pesa después y tiene un peso total de 123 toneladas. En la primera parada deja la mitad de su carga de gasolina. Se pesa entonces y tiene un peso total de 98 toneladas.

    Continúa marchando y llega a su destino completamente vacío. ¿Cuál es el peso del tren vacío?

2.3. Geometría

1. El área del triángulo que se muestra en la figura es

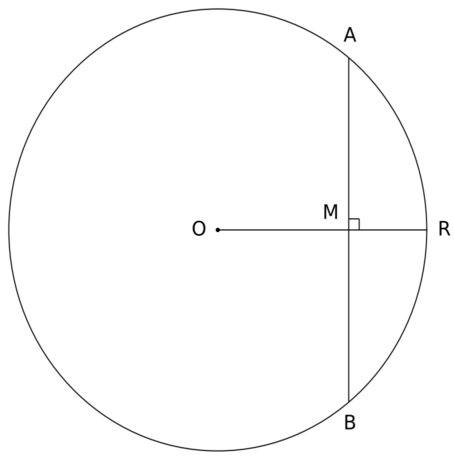


a) 24 *b*) 14 *c*) 28 *d*) 7

2. En un cubo, se duplica la longitud de sus lados para tener un cubo mayor. Si queremos llenar este nuevo cubo con cubos del tamaño original, la cantidad necesaria es:

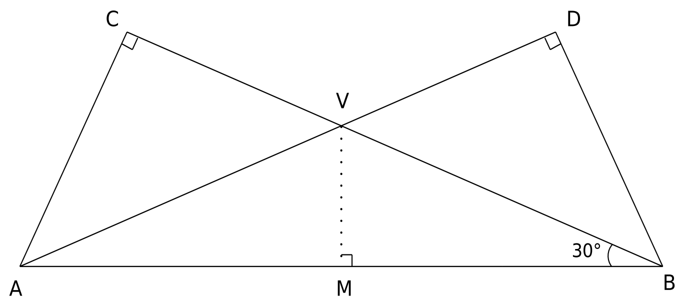
   a) 8 *b*) 6 *c*) 4 *d*) 2

3. En la figura, $\overline{AB}$ es perpendicular a $\overline{OR}$ en el punto M. Si $OM = \dfrac{3}{5}OR$ y $OR = 5$, entonces AB es igual a:



   a) 8 *b*) 3 *c*) 4 *d*) 5

4. En la figura, los triángulos rectángulos ABC y ABD son congruentes. $AM = MB$ y $AB = 12$. El área del triángulo AVB es:

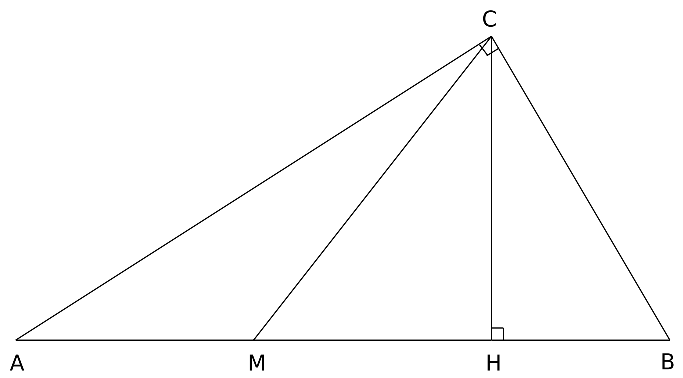


a) $12\sqrt{3}cm^2$ *b)* $9\sqrt{3}cm^2$ *c)* $8\sqrt{3}cm^2$ *d)* $6\sqrt{3}cm^2$

5. Una cadena de $15m$ de longitud se sujeta a los extremos superiores de dos postes verticales de $16m$ de altura cada uno, de manera que el punto de la cadena más próximo al suelo está a una altura de $8,5m$. ¿Cuál es la separación entre los dos postes?

a) $0m$ *b)* $8m$ *c)* $8,5m$ *d)* $7,5m$

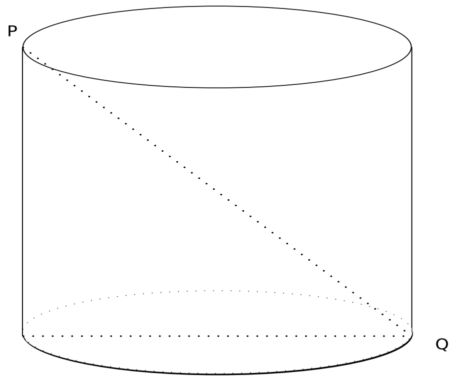
6. En la figura, M es el punto medio del $\overline{AB}$, $\overline{CH}$ es perpendicular a AB y el ángulo recto C está dividido en tres partes iguales. Si el área del triángulo ABC es x, entonces el área del triángulo HBC es:



a) $\frac{1}{3}x$ *b)* $\frac{1}{4}x$ *c)* $4x$ *d)* $\frac{1}{2}x$

7. Para probar la capacidad de giro de un automóvil, se le hace describir una circunferencia de tal manera que las ruedas exteriores dan el doble de número de vueltas que las inferiores. La separación entre las ruedas de un mismo eje es de 2 metros. ¿Cuál es la longitud de la circunferencia exterior?

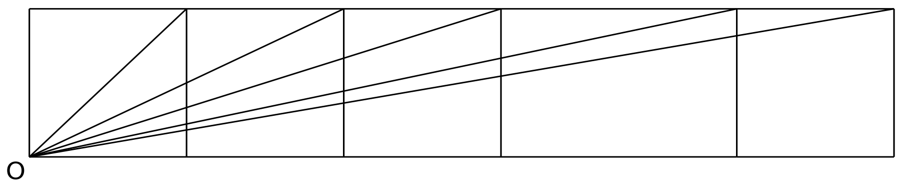
a) 2π metros *b)* 6π metros *c)* 4π metros *d)* 8π metros



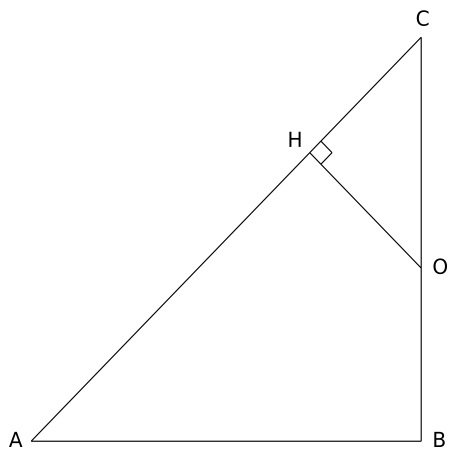
a) $\sqrt{16+\left(\frac{6}{\pi}\right)^2}$ *b*) $\sqrt{16+\left(\frac{3}{\pi}\right)^2}$ *c*) 7 *d*) 5

8. Consideremos n cuadros adyacentes de lado 2, como se indica en la figura, y los triángulos
OA_0A_1 ,OA_0A_2 ,. . . ,OA_0A_n. ¿Cuál es la suma de las áreas de los triángulos?

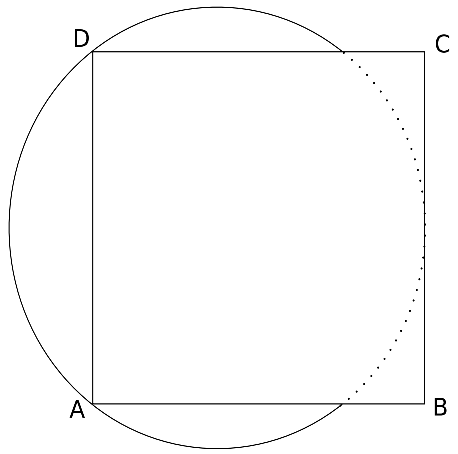
A_0 A_1 A_2 A_{n-1}
A_n



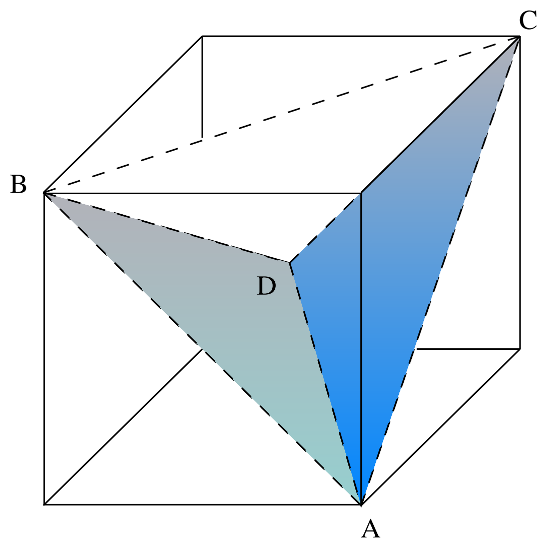
9. En la figura, O es el punto medio de $\overline{BC}$ y los ángulos $\angle ABC$ y $\angle CHO$ son rectos. Si $OB = \frac{\sqrt{39}}{2}$ y $AB = \frac{\sqrt{13}}{2}$ calcular OH.



10. Dado un cuadrado $ABCD$ de lado $8cm$, se construye un círculo que pasa por los vértices A y D siendo tangente al lado $\overline{BC}$ en su punto medio. Calcular el radio del círculo.



11. Cuatro de los ocho vértices de un cubo son vértices de un tetraedro regular. Hallar el cociente entre el área del cubo y el área del tetraedro.

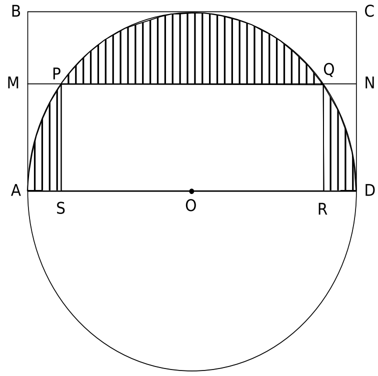


12. Se tiene un triángulo ABC, rectángulo en C. Expresar la altura respecto a la hipotenusa en función de los catetos a y b.

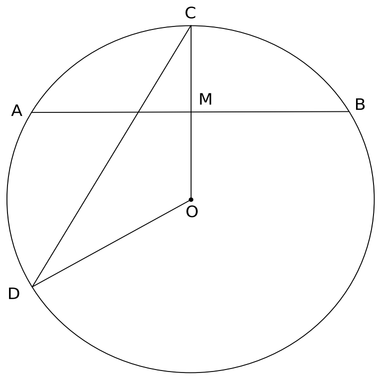
13. Se tiene un paralelogramo cuyo ángulo agudo mide 60. Determinar el cociente entre las longitudes de sus lados, sabiendo que el cociente entre los cuadrados de sus diagonales es $\dfrac{19}{7}$.

14. en la figura, $ABCD$ es el centro de un rectángulo y O es el centro de un círculo con radio r.

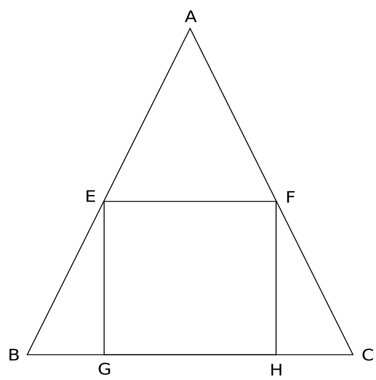
$\overline{AD}$ es un diámetro del círculo, M es el punto medio de $\overline{AB}$, N el punto medio de $\overline{CD}$ y $PQRS$ es un rectángulo. Calcular el área de la región sombreada, en términos del radio r del círculo.



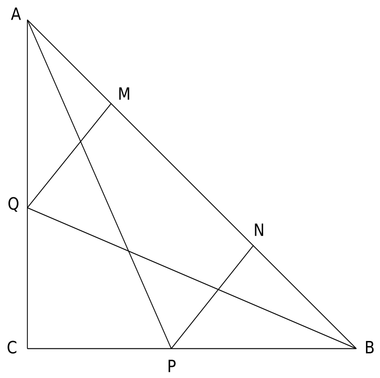
15. Sean A, B, C, D cuatro punto distintos en una circunferencia con centro O. Sea M el punto de intersección de $\overline{AB}$ $\overline{CO}$ de tal manera que $AM = MB$, $CM = MO$.
Si $\angle CDO$ mide 30°, demostrar que B, O y D son puntos colineales.



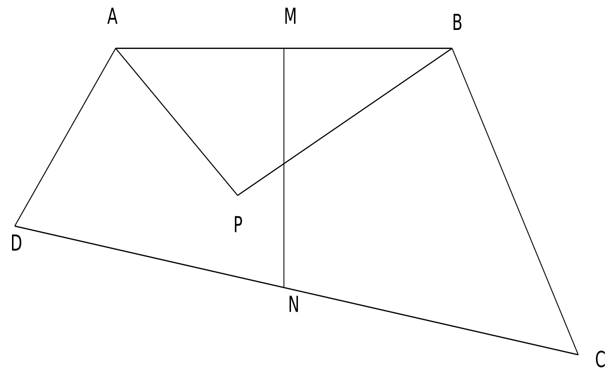
16. Sea $EFGH$ un cuadrado inscrito en un triángulo acutángulo ABC. Demostrar que el área de $EFGH$ es menor o igual a la mitad del área de ABC.



17. Sea ABC un triángulo rectángulo con ángulo recto $\angle ACB$. Sea P punto en $\overline{CB}$ tal que $\overline{AP}$ es la bisectriz de $\angle CAB$. Sea Q punto en $\overline{AC}$ tal que $\overline{BQ}$ es la bisectriz de $\angle ABC$. Sean M, N puntos en $\overline{AB}$ tales que $\overline{QM} \perp \overline{AB}$, $\overline{PN} \perp \overline{AB}$. Determinar la medida de $\angle MCN$.



18. En la figura, $AP = AD$, $BP = BC$, $AM = MB$, $\overline{AP} \perp \overline{AD}$, $\overline{BP} \perp \overline{BC}$, $\overline{MN} \perp \overline{AB}$.
Demuestra que N es el punto medio de $\overline{CD}$ y que $MN = AM = MB$.



19. Considere el rectángulo de base b y altura h. Si a dicho rectángulo se le aumenta $10m$. a la base y su altura se disminuye en $5m$. el área no se altera. Por otro lado, si la base se disminuye en $5m$. y la altura en $4m$., tampoco se altera. ¿Cuál es el área del rectángulo?.

20. Un profesor de gimnasia rítmica solicita a sus alumnos que se agrupen formando una cuadrado de x filas. Nota que le sobran 18 gimnastas. Ordena que se forme una nueva fila y una nueva columna, pero quedan 23 lugares sin llenar.

¿Cuántos alumnos constituían el grupo?.

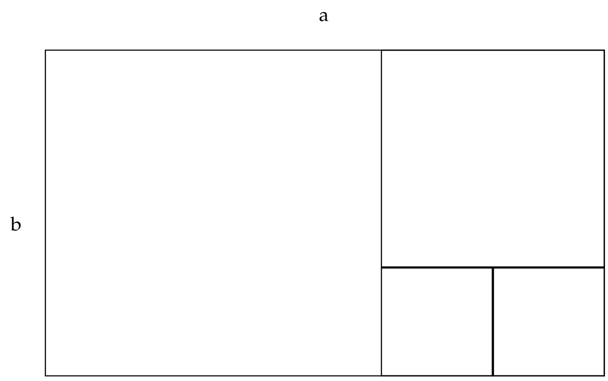
a) 500   *b*) 430   *c*) 361   *d*) 423   3) ninguno de los anteriores

21. En el triángulo ABC, se verifica que $\angle B = 2\angle C$ y $\angle A > 90$. Llamamos M al punto medio de BC. La perpendicular por C al lado AC corta a la recta AB en el punto D. Demostrar que $\angle AMB = \angle DMC$.

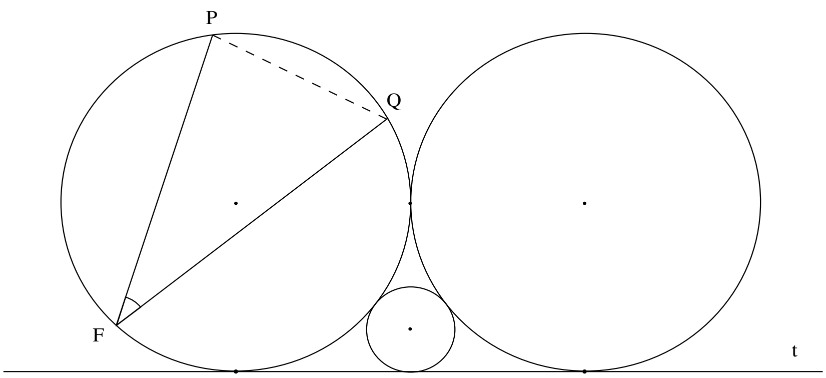
22. Se dan seis puntos de manera que no haya tres sobre una misma recta y que las longitudes de los segmentos determinados por estos puntos sean todas distintas. Consideramos todos los triángulos que tienen sus vértices en estos puntos. Demostrar que hay un segmento que es a la vez el lado más corto de uno de esos triángulos y el más largo de otro.

23. Dada una circunferencia de centro O y radio r, sea P un punto del plano de dicha circunferencia, tal que la distancia de P a O es mayor que r. Con centro en el punto medio de $\overline{OP}$ y radio $\frac{OP}{2}$, trazamos una circunferencia que intersecta a la circunferencia dada en los puntos R y T. Demostrar que $\overline{PR}$ y $\overline{PT}$ son tangentes y a la circunferencia dada y, además, $PR = PT$.

24. El rectángulo de la figura, de dimensiones a y b (con $a > b$) es descompuesto en cuadrados. Hallar $\frac{a}{b}$.



25. En la figura, las circunferencias son tangentes entre si y, además tangentes a la recta t. Las circunferencias mayores tienen radio igual a R; el radio de la menor es $r = 5cm$. Si $\angle PFQ = 30$, hallar PQ.



26. Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito en una circunferencia de tal forma que las prolongaciones de los lados AD y BC se encuentran en Q y las prolongaciones de AB y CD, en P. Pruebe que las bisectrices de los ángulos $\angle DQC$ y $\angle APD$ con perpendiculares.

27. En el triángulo ABC los segmentos BN, BL y BM son, respectivamente, altura, bisectriz y mediana desde el ángulo $\angle ABC$. Sabiendo que los ángulos $\angle ABN$, $\angle NBL$, $\angle LBM$ y $\angle MBC$ tienen la misma mediana, determine las medidas de los ángulos internos del triángulo ABC.

28. Se dan los puntos A, B, y C sobre una circunferencia K de manera que el triángulo ABC es acutángulo. Sea P un punto interior a K. Se trazan las rectas AP, BP y CP que cortan de nuevo a K en X, Y y Z. Demostrar que si el triángulo XYZ es equilátero, entonces P está en la intersección de los siguientes arcos capaces:

    a) El arco capaz de $60 + \angle BAC$, construido sobre BC.

    b) El arco capaz de $60 + \angle ABC$, construido sobre CA.

    Demostrar que el recíproco también es cierto: Si P está en la intersección mencionada, entonces el triángulo XYZ es equilátero.

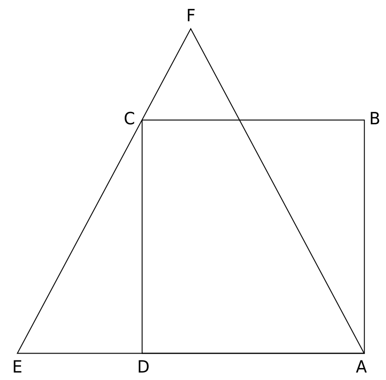
29. Probar que hay un único triángulo cuyos lados tienen por longitudes enteros consecutivos y uno de sus ángulos es doble de otro.

30. Un hexágono regular $ABCDEF$ tiene sus lados de longitud igual a 2. Calcule el área del hexágono $PQRSTU$, sabiendo que cada uno de los vértices de este hexágono es el punto medio de alguno de los lados del hexágono $ABCDEF$.

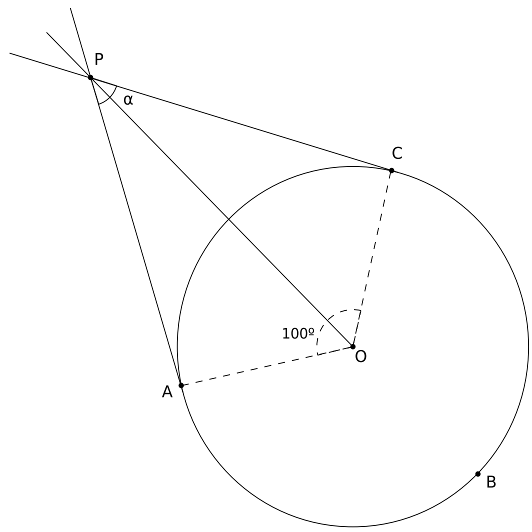
31. Se disponen los estudiantes de una clase de baile igualmente espaciados en un circulo y luego se les asignan números consecutivos comenzando por el 1. El estudiante numero 20 se encuentra diametralmente opuesto al estudiante número 53. ¿Cuántos estudiantes hay en la clase?

32. Una circunferencia está dividida en $3k$ arcos, k de los cuales tienen longitud unitaria, otros k tienen longitud igual a 2 y los k restantes son de longitud igual a 3. Demuestre que por lo menos 2 extremos opuestos de los $3k$ arcos son diametralmente opuestos.

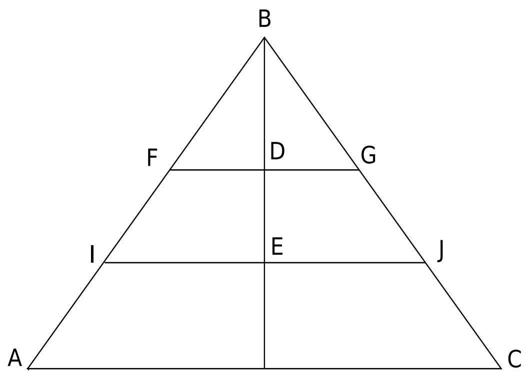
33. $ABCD$ es un cuadrado y AEF es un triángulo equilátero. Si el área del cuadrado es $18cm^2$, ¿cuál es el área del triángulo?



34. En la figura se tiene que el arco ABC mide 260. Hallar α donde A y C son puntos de tangencia.

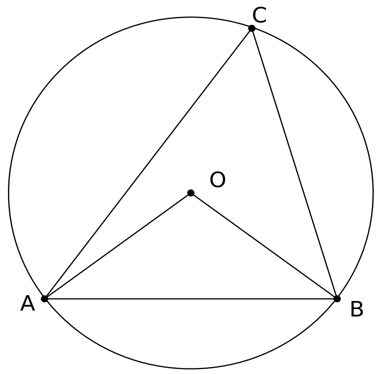


35. El triángulo ABC tiene un área igual a $24cm^2$. Si la altura BH se divide en tres partes iguales BD, DE, EG y los segmentos IJ, FG se trazan por E y D respectivamente, siendo $IJ \| FG$, $FG \| AC$, encuentre el área del triángulo BFG y las áreas de los trapecios $FGIJ$ y $IJCA$.



36. El triángulo ABC tiene ángulo recto en B y contiene un punto P para el cual $PA = 10$, $PB = 6$ y $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA$. Halle la longitud del segmente PC.

37. En la figura, calcule el valor de α



2.4. Matemática Recreativa y Lógica

1. Un número entero se llama descendente si cada dígito del número es mayo que el que esa colocado a su derecha; por ejemplo, 321 es un número descendente. La cantidad de números descendentes entre 100 y 200 es:

   a) 0 *b*) 1 *c*) 25 *d*) 32

2. Se tienen siete monedas; todas iguales en forma y tamaño, pero dos de ellas son un poco más pesadas que las otras cinco. Si tienes una balanza de dos platillos, ¿cuál es el menor número de veces que debes pesar las monedas para determinar las dos más pesadas?.

3. ¿Es posible encontrar y acomodar 16 números enteros consecutivos en las casillas de una cuadrícula de 4×4 de modo que la suma de los cuatro números en cada cuadrado 2×2 que se forma en la cuadrícula sea múltiplo de 5?

4. El promedio de bateo de un beisbolista se calcula como el número de hits obtenidos divididos entre el número de turnos al bate y multiplicado por 1000. Por ejemplo, si en 10 turnos bateó 3 hits, el promedio de bateo es 300. Supongamos que el promedio es mayor que 250 y más adelante es menor que 250. ¿Fue en algún momento exactamente 250?

5. En las casillas de un tablero 5×5 deseamos colocar fichas (a lo más una por casilla) de tal forma que no se encuentren 4 fichas formando un rectángulo con lados paralelos a los lados del tablero. Determina la cantidad mínima de fichas que se puedan usar para que sea posible tal construcción y explica por qué es la mínima.

6. Entre $3:00$ p.m. y $4:00$ p.m. José miró su reloj y observó que la aguja de los minutos está entre 5 y 6. Luego, entre $5:00$ p.m. y $6:00$ p.m, José

miró su reloj por segunda vez, observó que las agujas forman el mismo ángulo, con las posiciones intercambiadas. ¿Cuántos minutos deben haber transcurrido después de las $5 : 00$ p.m. cuando José miró el reloj por segunda vez?

7. Un número de cuatro cifras es tartamudo si tiene las dos primeras cifras iguales entre sí y las dos últimas cifras iguales entre sí, por ejemplo 3311 y 2222 son número tartamudos. Hallar todos los números tartamudos de cuatro cifras que son cuadrados perfectos.

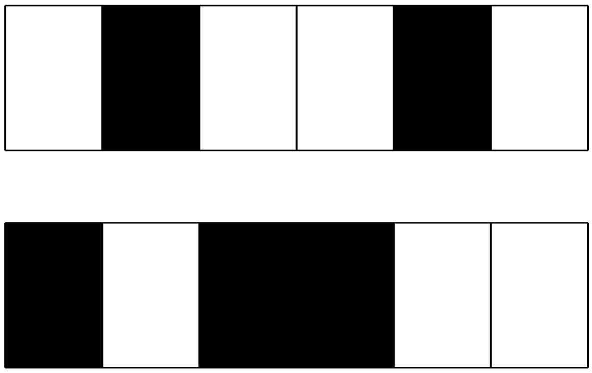
8. Hay 27 cajas ubicadas en una fila; cada una contiene por los menos 12 bolitas. La operación permitida es transferir una bolita desde una caja hacia su vecina de la derecha, siempre y cuando dicha vecina contenga más bolitas que la caja desde la que se hará la transferencia. Diremos que una distribución inicial de las bolitas es *feliz* si es posible lograr, mediante una sucesión de operaciones permitidas, que todas las bolitas queden en una misma caja. Determinar cuál es el menor números total de bolitas con el que se puede tener una distribución inicial feliz.

9. Se tienen dos octógonos regulares de cartulina. Los vértices de cada octógono se enumeran de 1 a 8, en cualquier orden (el orden para un octógono puede ser diferente al del otro). Luego los octógonos se superponen, de modo que cada vértice de uno quede en contacto con un vértice del otro. Los números de los vértices en contacto se multiplican, y los 8 productos obtenidos se suman.
Demostrar que, cualquiera sea el orden en que hayan sido numerados los vértices, siempre es posible superponer octógonos de manera que esa suma sea mayor o igual a 162.

10. En una reunión social había n personas; cada una saludó a las otras con un apretón de manos. Si hubo en total 66 apretones de manos, podemos afirmar que:

    a) n es un número primo.
    b) n es un número impar.
    c) n es un divisor de 66.
    d) n es un divisor de 33.
    e) n es un múltiplo de 6.

11. Un código para la lectura óptica está constituido por seis barrar, blancas o negras. Ningún código tiene todas las barras de un solo color. Ejemplos de los códigos:



¿Cuántos códigos, distintos entre si, pueden formarse?

12. En un juicio hay 4 acusados, sabemos que:

    - Si A es culpable, entonces B es culpable.
    - Si B es culpable, entonces C es culpable o A es inocente.
    - Si D es inocente, entonces A es culpable y C es inocente.
    - Si D es culpable, entonces A es culpable.

    Diga cuántos acusados son culpables y explique las razones para su respuesta.

13. Un entero positivo de n dígitos se llama *bonito* si sus n dígitos son un arreglo del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ y sus primeros k dígitos forman un entero que es divisible por k, para $k = 1, 2, \ldots, n$. Por ejemplo 321 es un entero bonito de 3 dígitos. ¿Cuántos enteros positivos de seis dígitos son bonitos?

14. Un número natural mayor que 1 se llama *agradable* si es igual al producto de sus distintos divisores propios. ¿Cuál es la suma de los primeros 10 números agradables?

15. Ana, Beto, Carlos y Diana están sentados en una fila de cuatro asientos numerados del 1 al 4. José los mira y dice: "Ana está al lado de Carlos"; "Ana está entre Beto y Carlos". Sucede que cada una de las dos afirmaciones que hizo José es falsa. En realidad Beto está sentado en el asiento 3. ¿Quién está sentado en el asiento 2?

16. Un entero mayor que 10 se dice *bueno* si sus dígitos se pueden dividir en dos grupos tales que la suma de los dígitos de uno de los grupos es igual a la suma de los dígitos del otro grupo. Por ejemplo 22 es bueno, pues $2 = 2$; 3454 es bueno pues $3 + 5 = 4 + 4$; 29403 es bueno pues $9 + 0 = 2 + 3 + 4$. Halle el menor número natural n tal que n es bueno y $n + 1$ también es bueno.

17. Madre e hija estaban celebrando sus cumpleaños, los cuales coinciden.

-Recuerdo que el año pasado yo tenía el doble de tu edad- Dijo la madre.

-¿Has notado que nuestras edades son números primos?- Pregunta la hija.

-Cierto- respondió la madre, -observa además que nuestras edades tienen las mismas cifras pero permutadas-

¿Cuáles son sus edades?

18. Tes jovencitas están merendando sentadas alrededor de una mesa redonda. Se sabe que una de ellas es andina, una es maracucha y la otra es oriental. Sus nombres son Angela, María y Rosa con el entendido que el orden dado de los nombres no es necesariamente el mismo de los gentilicios. Cada muchacha pasa tres galletas a la persona de su derecha. María pasa tres galletas de vainilla a la andina. Angela de pasa tres galletas de chocolate a la persona que pasó tres galletas a la maracucha. ¿Cuál es la oriental?

2.5. Relaciones y Funciones

1. ¿Cuál de los siguientes puntos no está en la gráfica de la función $y = \dfrac{x^2+2x}{x-1}$?

   a) $(-1, \frac{1}{2})$ *b)* $(2, 8)$ *c)* $(1, 0)$ *d)* $(0, 0)$

2. Las gráficas de $y = \log 3x$ e $y = \log x^3$ se cortan en:

   a) ningún punto *b)* más de dos puntos *c)* sólo dos puntos *d)* sólo un punto

3. Si $f(x) + f(y) = f(x+y) - xy - 1$ para todo par x, y de números reales y $f(1) = 1$, entonces $f(3)$ es igual a:

   a) 13 *b)* 8 *c)* 4 *d)* 0

4. Si $f(x, y) = \dfrac{xy}{x+y}$ para todo par x, y de números reales positivos, entonces $f(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ es igual a:

   a) $\dfrac{1}{2}$ *b)* $\sqrt{2}$ *c)* $2\sqrt{2}$ *d)* $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

5. Si la función definida por $f(x) = \dfrac{ax}{2x+3}$, $x \neq -\dfrac{3}{2}$ y a constante, satisface $f(f(x)) = x$ para todo real x, excepto $x = -\dfrac{3}{2}$, calcular a.

6. Encontrar todas las funciones f de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}$ que satisfacen las siguientes condiciones:

   $f(x+y) = f(x) + f(y)$

$f(x.y) = xf(x) + f(x)y$

Para todos x e y en $\mathbb{Q}$.

7. Considera la sucesión a_1,a_2,a_3,..., definida de la siguiente manera:
$a_1 = 1080$
$a_{12} = 2001$
$a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}+1}{a_n}$, para $n = 1, 2, \ldots$

   Encuentra a_{2001}.

8. Dado el conjunto $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2000, 2001\}$
¿Cuántos subconjuntos de A existen tales que contengan sólo tres elementos y que ningún par de estos tres elementos sean enteros consecutivos?.

9. Dada una función definida, de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ como:

   $f(1) = 1$
$f(n) = f(n-1) + 1$ si n es un cuadrado perfecto de $(n > 1)$
$f(n) = f(n-1)$ si n no es un cuadrado perfecto $(n > 1)$.

   Demuestra que $f(a + b) \leq f(a) + f(b)$, para todos los a y b naturales.

10. Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que para todo x e y reales se cumple que:

$$f(x)f(y) = f(x + y) + xy$$

11. Consideremos la función $f(x) = 4x - x^2$ y definamos la sucesión x_n de la siguiente manera

$$x_n = f(x_{n-1}) \text{ para todo número natural } n \geq 1.$$

   Si $x_0 = 1$, entonces el valor de la suma

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{1999} + x_{2000} \text{ es}$$

   a) 2000 *b*) 4000 *c*) 6000 *d*) 8000 *e*) 10000

12. Sea f una función de los reales positivos en los reales positivos, tal que:

$$f(x)f(y) - f(xy) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

   - Halle $f(1)$.
   - Halle una expresión para $f(x)$.

13. El polinomio $(2x - 4)(x + 1) - x + 2 - 5(x - 2)$ alcanza su valor mínimo cuando x es:

   a) 1 *b*) 2 *c*) -1 *d*) 0

14. Supongamos que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función que satisface las propiedades

    a) $f(x) \neq 0$

    b) $f(x + y) = f(x) + f(y)$

    c) $f(xy) = f(x)f(y)$

    Demuestre que $f(1) = 1$ y calcule $f(2002)$.

15. Sean x, y, z tres números reales positivos diferentes de 1. Entonces si

$$\log_{xz} xy = \frac{1 + \log_x y}{1 + \log_x z}$$

    Hallar el valor de $(\log_7 14) \cdot (\log_{14} 21) \cdots (\log_{42} 49)$.

16. Muestre que para todo $n \geq 2001$, vale la desigualdad

$$\left(1 - \frac{1}{2001^3}\right)\left(1 - \frac{1}{2002^3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^3}\right) > \frac{2000}{2001}$$